HOMOLOGIE

Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

Suite Exacte d'Homologie

- Réf. Northcott D.G., An introduction to Homological Algebra, Cambridge Univ. Press, 1960 page 60
- Réf. Balcerzyk & Józefiak, Commutative rings, 1989 p 161 (Memento sur "Homological Background")
- Cours de Lemaire DEA Nice

Th : Toute suite exacte de complexes (disons de R-modules, R = anneau)

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W \to 0$$

induit une suite exacte longue des modules d'homologie :

$$\cdots \to H_p(X) \to H_p(Y) \to H_p(W) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(X) \to H_{p-1}(Y) \to \cdots \quad (*)$$

- Le morphisme δ est appelé "morphisme de connexion". Il est défini ainsi (cf diag 1) : Si $w \in Z_p(W)$, il existe $y \in Y_p$ tq $g(y) = w$. Alors $d_p(y)$ est dans $\operatorname{Im} f$ et il existe $x \in X_{p-1}$ tq $f(x) = d_p(y)$. En fait $x \in Z_{p-1}(X)$ et l'on peut poser $\delta(w) = \bar{x}$.
- Les autres morphismes sont définis de façon triviale.

preuve : Fixons les notations avec le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & X_{p+1} & & Y_{p+1} & & W_{p+1} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & X_p & \xrightarrow{f} & Y_p & \xrightarrow{g} & W_p & \to & 0 \\
 & & \downarrow d_p & & \downarrow d_p & & \downarrow d_p & & \\
0 & \to & X_{p-1} & \to & Y_{p-1} & \to & W_{p-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow d_{p-1} & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & X_{p-2} & \to & Y_{p-2} & \to & W_{p-2} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array} \qquad \text{(diag 1)}$$

(flèche δ de W_p vers X_{p-1})

suite exacte de complexes

X = complexe de R-module $\cdots \to X_p \xrightarrow{d_p} X_{p-1} \to \cdots$ (ie les X_p sont des R-modules, les d_p sont linéaires, et $d_{p-1} \circ d_p = 0$)

① Définition du morphisme $H_p(X) \longrightarrow H_p(Y)$:

On pose $H_p(X) \xrightarrow{H_p(f)} H_p(Y)$.
$\dot{x} \longmapsto \dot{\overline{f(x)}}$

$H_p(f)$ est bien déf. car si $\dot{x} = \dot{x}'$, $x - x' \in B_p$ donc $x - x' = d_{p+1}(z)$ où $z \in X_{p+1}$.
Alors $f(x) - f(x') = f(x - x') = f \circ d_{p+1}(z) = d_{p+1} \circ f(z) \in B_p(Y)$ entraine $\dot{\overline{f(x)}} = \dot{\overline{f(x')}}$
□

② La suite $H_p(X) \xrightarrow{H_p(f)} H_p(Y) \xrightarrow{H_p(g)} H_p(W)$ est exacte en $H_p(Y)$:

$H_p(g) \circ H_p(f)(\dot{x}) = \dot{\overline{g \circ f(x)}} = \dot{0}$ donc $\operatorname{Im} H_p(f) \subset \operatorname{Ker} H_p(g)$

Réc., si $\dot{y} \in \operatorname{Ker} H_p(g)$, $g(y) \in B_p(W)$ soit

$$g(y) = d_{p+1}(w)$$

Il existe $y' \in Y_{p+1}$ tq $w = g(y')$ donc

$$g(y) = d_{p+1} \circ g(y') = g \circ d_{p+1}(y')$$

donc $y - d_{p+1}(y') \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ et il existe $x \in X_p$ tq

$$y - d_{p+1}(y') = f(x)$$

soit

$$\boxed{\dot{y} = \dot{\overline{f(x)}} \text{ dans } H_p(Y)}$$

(x est un cycle puisque

$d_p(x) = 0 \iff f \circ d_p(x) = 0 \iff d_p \circ f(x) = 0 \iff d_p(y - d_{p+1}(y')) = 0$
$\iff d_p(y) = 0 \iff y \in Z_p(Y)$ vrai

donc on peut conclure à $\dot{y} = H_p(f)(\dot{x}) \in \operatorname{Im} H_p(f)$. □

③ Le morphisme de connexion est bien défini :

ⓐ Construction (cf diag. 1) :

$w \in Z_p(W)$ ⟶ pour définir $\delta(w)$

$y \in Y_p \quad g(y) = w$ ⟶ g surjective

$d_p(y) = \beta(x)$ où $x \in X_{p-1}$ ⟶ car $g \circ d_p(y) = d_p \circ g(y) = d_p(\underset{Z_p}{w}) = 0$ entraîne $d_p(y) \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} \beta$

$x \in Z_{p-1}$ ⟶ car $d_{p-1}(x) = 0 \Leftrightarrow \beta \circ d_{p-1}(x) = d_{p-1} \circ \underbrace{\beta(x)}_{d_p(y)} = 0$ vrai

On pose $\delta(w) = x$

ⓑ x est indépendant de la construction ci-dessus :

Si $\begin{cases} g(y) = g(y') = w & y, y' \in Y_p \\ d_p(y) = \beta(x) \text{ et } d_p(y') = \beta(x') & x, x' \in Z_{p-1} \end{cases}$

il faut prouver que $x - x' \in B_{p-1}$.

On a $\begin{cases} g(y-y') = 0 & (1) \\ \beta(x-x') = d_p(y-y') & (2) \end{cases}$

(1) ⇒ $y - y' \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} \beta$. Soit $x'' \in X_p$ tq $y - y' = \beta(x'')$

Alors (2) entraîne :

$$\beta(x-x') = d_p \circ \beta(x'') = \beta \circ d_p(x'') \underset{\beta \text{ injective}}{\Longrightarrow} x - x' = d_p(x'') \in B_{p-1}(X).$$

□

④ <u>La suite (*) est exacte en $H_p(W)$</u> :

- Si $y \in Z_p(Y)$, $\delta \circ H_p(g)(\dot{y}) = \delta(\dot{\overline{g(y)}}) = \dot{x}$

  où $\beta(x) = d_p(y) = 0$, donc $x = 0$, donc $\delta \circ H_p(g) = 0$.

- Réc, si $\dot{w} \in \operatorname{Ker} \delta$, $w \in Z_p(W)$ et il faut trouver $y' \in Z_p(Y)$ tq $w = g(y)$.

  On a

  $\delta(\dot{w}) = 0 \iff \delta(\dot{w}) = \dot{x} = \dot{0}$ où $\beta(x) = d_p(y)$ et $g(y) = w$

  De $\dot{x} = \dot{0}$, on déduit l'existence de $x' \in B_{p-1}(X)$ tq $x = d_p(x')$, d'où :

  $$d_p(y) = \beta \circ d_p(x') = d_p \circ \beta(x') \Rightarrow y - \beta(x') \in Z_p(Y)$$

  Il suffit de poser $y' = y - \beta(x') \in Z_p(Y)$ pour constater $g(y') = w$ □

⑤ <u>La suite (*) est exacte en $H_{p-1}(X)$</u> :

- $\forall w \in Z_p(W)$ $H_{p-1}(\beta) \circ \delta(\dot{w}) = H_{p-1}(\beta)(\dot{x})$ où x vérifie $\begin{cases} y \in Y_p & g(y) = w \\ \beta(x) = d_p(y) \end{cases}$

  $$= \dot{\overline{\beta(x)}} = \dot{\overline{d_p(y)}} = 0$$

  donc $\operatorname{Im} \delta \subset \operatorname{Ker} H_{p-1}(\beta)$

- Réc., si $z \in \operatorname{Ker} H_{p-1}(\beta)$ ie si $\beta(z) \in B_{p-1}(Y)$, il faut prouver que $\dot{z} \in \operatorname{Im} \delta$ autrement dit que $\dot{z} = \delta(\dot{w})$ où $w \in Z_p(W)$, ou encore :

  $$\exists w \in Z_p(W) / \text{Si } \begin{cases} y' \in Y_p & g(y') = w \\ \beta(x') = d_p(y') \end{cases} \text{ alors } \dot{z} = \delta(\dot{w}) = \dot{x}' \quad \text{(A)}$$

(A) est triviale car l'hypothèse s'écrit :

$$\exists y \in Y_p \quad \beta(z) = d_p(y)$$

On choisit $x = z$ et l'on pose $g(y) = w$ pour avoir (A). (w est alors bien un cycle car $d_p(w) = d_p \circ g(y) = g \circ d_p(y) = g \circ \beta(z) = 0$) □

R-Modules projectifs

Réf : Balcerzyk et Józefiak, Commutative Rings, 1989 p157 ("Homological Background")

Ces notes explicitent un théorème de l'appendice donné en référence ci-dessus, et ne remplacent pas cet excellent appendice.

Def : Un R-module F est dit projectif si tout diagramme du style

$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & & \downarrow & & \\ M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où la suite $M \to N \to 0$ est exacte, peut être complété en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & \swarrow & \downarrow & & \\ M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

- Tout module libre est projectif puisqu'il suffit de choisir les valeurs d'un morphisme sur chaque élément d'une base de ce module pour déterminer parfaitement ce morphisme. La surjectivité de la flèche $M \to N \to 0$ fait le reste.

- Toute somme directe de modules libres est un module projectif.

Th : (Caractérisation). Soit F un R-module.

1) Le foncteur $\mathrm{Hom}_R(F, -)$ est toujours exact à gauche.

2) Le foncteur $\mathrm{Hom}_R(F, -)$ est exact ssi F est projectif.

preuve :

(1) **Quel est le foncteur $Hom_R(F,-)$?**

Catégorie des R-modules $\rightsquigarrow$ Catégorie des R-modules

$$(M \xrightarrow{u} N) \longmapsto \begin{pmatrix} Hom(F,M) \xrightarrow{\Psi_u} Hom(F,N) \\ f \longmapsto u \circ f \end{pmatrix}$$

On vérifie que Ψ_u est bien un homomorphisme de R modules :

$$\Psi_u(\lambda f + g) = u\circ(\lambda f + g) = \lambda u\circ f + u\circ g = \lambda \Psi_u(f) + \Psi_u(g)$$

1) **$Hom_R(F,-)$ est exact à gauche :**

Si $0 \to M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$ est exacte, il s'agit de mq la suite

$$0 \to Hom(F,M) \xrightarrow{\Psi_u} Hom(F,N) \xrightarrow{\Psi_v} Hom(F,P)$$

est encore exacte.

- **Exactitude en $Hom(F,N)$:**

$\Psi_v \circ \Psi_u(f) = \Psi_v(u\circ f) = v\circ u\circ f = 0\circ f = 0$

Réc., si $g \in Ker \Psi_v$, on a $v\circ g = 0$ donc :

$\forall x \in F \quad v(g(x)) = 0 \Rightarrow g(x) \in Ker v = Im u \Rightarrow \exists m_x \in M \quad g(x) = u(m_x)$

L'application $f : F \to M$, $x \mapsto m_x$ est un morphisme car

$\forall x, y \in F \ \forall \lambda \in R \quad g(x+\lambda y) = g(x) + \lambda g(y) \Rightarrow u(m_{x+\lambda y}) = u(m_x) + \lambda u(m_y)$

$\underset{(u \text{ inj.})}{\Rightarrow} m_{x+\lambda y} = m_x + \lambda m_y$

Donc $f \in Hom(F,M)$ et $g = u\circ f = \Psi_u(f) \in Im \Psi_u$.

- **Exactitude en $Hom(F,M)$** ; mq Ψ_u est injective.

$\Psi_u(f) = 0 \Leftrightarrow u\circ f = 0 \Leftrightarrow f = 0$ car u injective.

2) $Hom_R(F, -)$ est exacte ssi il est exacte à droite, et cela équivaut à : "Pour toute suite exacte $M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P \to 0$, la suite $Hom(F,M) \xrightarrow{\Psi_u} Hom(F,N) \xrightarrow{\Psi_v} Hom(F,P) \to 0$ est exacte"

Vu l'exactitude (démontrée en 1)) en $Hom(F,N)$, on aura :

$Hom_R(F,-)$ exacte $\iff$ (Pour toute suite exacte $M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P \to 0$ l'appl. $Hom(F,N) \xrightarrow{\Psi_v} Hom(F,P)$ est surjective)

$\iff$ (Pour toute suite exacte $N \xrightarrow{v} P \to 0$ et tout morphisme $F \xrightarrow{f} P$, il existe $g \in Hom(F,N)$ tq $v \circ g = f$)

$\iff$ F projectif.

Complexe de KOSZUL

M = R-module

$\otimes^p M$ = produit tensoriel de p copies de M

$\Lambda^p M$ = R-module quotient $\otimes^p M / S$

où S est le sous-module engendré par les él. $u_1 \otimes \cdots \otimes u_p$ avec $u_i = u_j$ pour 2 indices $i \neq j$. On note $u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$ la classe de $u_1 \otimes \cdots \otimes u_p$ dans $\Lambda^p M$.

$\Lambda^0 M \doteq R$

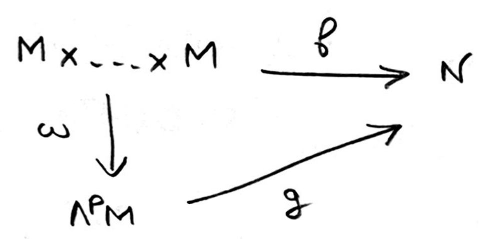
$\Lambda^1 M = M$

$\Lambda M \doteq \bigoplus_{p \geq 0} \Lambda^p M \doteq$ Algèbre extérieure construite sur M

① Propriété universelle

$$\omega : M \times \cdots \times M \longrightarrow \Lambda^p M \qquad \text{est } p\text{-linéaire alternée}$$
$$(u_1, \ldots, u_p) \longmapsto u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$$

et pour toute appl. p-linéaire alternée $f : M \times \cdots \times M \longrightarrow N$, où N est un R-module, il existe un unique morphisme g tq $f = g \circ \omega$.



Remarque : Si M est un R-module libre de type fini, de base $(e_1, \ldots, e_n)$, alors $\Lambda^p M$ est un R-module libre de type fini et de base $(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}$, donc de rang C_n^p.

Réf : ① BALCERZYK & JÓZEFIAK, "Commutatives Rings" p 175
② Article de 1962 d'Eagon et Northcott

② ΛM est une algèbre graduée

- C'est un R-module
- Multiplication : notée $\wedge$ et tq $u_1 \wedge \dots \wedge u_p$ soit réellement le produit des éléments $u_1, \dots, u_p \in M = \Lambda^1 M$.

On pose d'abord

$$\begin{cases} \forall \lambda \in R \quad \forall u_1 \wedge \dots \wedge u_p \in \Lambda^p M \quad \lambda \wedge (u_1 \wedge \dots \wedge u_p) \doteq \lambda (u_1 \wedge \dots \wedge u_p) \doteq (u_1 \wedge \dots \wedge u_p) \wedge \lambda \\ \forall u_1 \wedge \dots \wedge u_p \in \Lambda^p M \quad \forall v_1 \wedge \dots \wedge v_p \in \Lambda^q M \quad (u_1 \wedge \dots \wedge u_p) \wedge (v_1 \wedge \dots \wedge v_q) = \underbrace{u_1 \wedge \dots \wedge u_p \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_q}_{\in \Lambda^{p+q} M} \end{cases}$$

et cette définition est indépendante du choix des représentants $u_1 \otimes \dots \otimes u_p$ et $v_1 \otimes \dots \otimes v_q$ de $u_1 \wedge \dots \wedge u_p$ et $v_1 \wedge \dots \wedge v_p$. En effet,

$$\forall u, u' \in \otimes^p M \qquad \forall v, v' \in \otimes^q M \qquad \text{avec } u - u' \in S \text{ et } v - v' \in S$$

on a $\quad u \otimes v - u' \otimes v' = (u - u') \otimes v + u' \otimes (v - v') \in S$.

Remarque : on vient d'utiliser la bilinéarité de

$$\begin{aligned} (\otimes^p M) \times (\otimes^q M) &\longrightarrow \otimes^{p+q} M \\ (u, v) &\longmapsto u \otimes v \end{aligned}$$

qui provient de la définition du produit tensoriel (cf [U] Produit tensoriel) et de $\otimes^{p+q} M = (\otimes^p M) \otimes (\otimes^q M)$ (cf propriété de $\otimes$: $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C \doteq A \otimes B \otimes C$)

Par passage au quotient, on déduit encore :

$$\begin{aligned} (\Lambda^p M) \times (\Lambda^q M) &\longrightarrow \Lambda^{p+q} M \\ (u, v) &\longmapsto u \wedge v \end{aligned}$$

est bilinéaire.

Définition du produit en général :

$\forall a, b \in \Lambda M = \bigoplus_{p \geq 0} \Lambda^p M \quad \exists! a_p, b_p \in \Lambda^p M \quad a = \sum a_p$ et $b = \sum b_p$

(Sommes finies)

et l'on pose
$$\boxed{a \wedge b = \sum_{p,q} a_p \wedge b_q}$$

Proposition : $\wedge$ est une loi interne sur ΛM, associative et distributive par rapport à l'addition.

preuve : Associativité évidente.

Distributivité : en notant $a = \sum a_p \quad b = \sum b_q \quad c = \sum c_q$

$$a \wedge (b+c) = a \wedge b + a \wedge c \iff \sum_{p,q} a_p \wedge (b_q + c_q) = \sum_{p,q} a_p \wedge b_q + a_p \wedge c_q$$

et tout revient à montrer que

$$\forall a_p \in \Lambda^p M \quad \forall b_q, c_q \in \Lambda^q M \qquad a_p \wedge (b_q + c_q) = a_p \wedge b_q + a_p \wedge c_q$$

c'est acquis d'après la remarque de la p2. □

Proposition : Caractère alterné

On a $(u+v) \wedge (u+v) = 0 \implies u \wedge v = -v \wedge u \qquad \forall u, v \in M$ (Antisymétrie)

On déduit par récurrence sur $p+q=n$:

$$\boxed{\forall p, q \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \Lambda^p M \quad \forall y \in \Lambda^q M \qquad x \wedge y = (-1)^{pq} y \wedge x}$$

preuve : Soit $H(p,q)$ cette assertion. $H(0,0)$, $H(0,1)$ et $H(1,0)$ sont triviaux. Par ex. pour $H(0,0)$: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda\mu = (-1)^{0 \times 0} \mu\lambda$

pour $H(0,1)$: $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \Lambda^1 M = M \quad \lambda \wedge y = \lambda y = (-1)^{0 \times 1} y \wedge \lambda$

Au rang $p+q=n$, $x = z \wedge x'$ où $z \in M$ et $x' \in \Lambda^{p-1} M$ donc

$$\begin{aligned} x \wedge y = z \wedge (x' \wedge y) &= (-1)^{(p-1)q} z \wedge (y \wedge x') = (-1)^{(p-1)q} (z \wedge y) \wedge x' \\ &= (-1)^{(p-1)q} (-1)^q (y \wedge z) \wedge x' \\ &= (-1)^{pq} y \wedge x \end{aligned}$$

□

③ Dérivation

Si $\varphi \in \mathrm{Hom}(M,R)$ on définit le complexe de R-modules

$$\cdots \longrightarrow K_p(\varphi) \xrightarrow{d_p} K_{p-1}(\varphi) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underbrace{K_1(\varphi)}_{= M} \longrightarrow \underbrace{K_0(\varphi)}_{= R} \longrightarrow 0$$

en posant $K_p(\varphi) = \Lambda^p M$ et

$$d_p(u_1 \wedge \cdots \wedge u_p) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \varphi(u_k)\, u_1 \wedge \cdots \wedge \hat{u}_k \wedge \cdots \wedge u_p$$

- d_p est bien définie grâce à la prop. universelle de ΛM^p : vérifier que $(u_1, \dots, u_p) \longmapsto \sum (-1)^{k+1} \varphi(u_k) u_1 \wedge \cdots \wedge \hat{u}_k \wedge \cdots \wedge u_p$ est bien multilinéaire alternée.
- Vérifions que $d_{p-1} \circ d_p = 0$

$$d_{p-1} \circ d_p(u_1 \wedge \cdots \wedge u_p) = \sum_{\substack{1 \le l \le p \\ l \ne k}} \sum_{1 \le k \le p} (-1)^{k+1} (-1)^{t} \varphi(u_k)\varphi(u_l)\, u_1 \wedge \cdots \wedge \hat{u}_k \wedge \cdots \wedge \hat{u}_l \wedge \cdots \wedge u_p$$

avec $t = \begin{cases} l & \text{si } k < l \\ l+1 & \text{si } k > l \end{cases}$

$d_{p-1} \circ d_p(u_1 \wedge \cdots \wedge u_p)$ est donc formé de sommes du style, $k_0 < l_0$ étant fixés :

$$\sum_{(k,l) = (k_0,l_0) \text{ ou } (l_0,k_0)} = (-1)^{k_0+1} (-1)^{l_0} \varphi(u_{k_0})\varphi(u_{l_0})\, u_1 \wedge \cdots \wedge \hat{u}_{k_0} \wedge \cdots \wedge \hat{u}_{l_0} \wedge \cdots \wedge u_p$$
$$+ (-1)^{l_0+1} (-1)^{k_0+1} \varphi(u_{k_0})\varphi(u_{l_0})\, u_1 \wedge \cdots \wedge \hat{u}_{k_0} \wedge \cdots \wedge \hat{u}_{l_0} \wedge \cdots \wedge u_p$$
$$= 0$$

□

Pro : $\forall x \in \Lambda^p M \quad \forall y \in \Lambda^q M \quad d_{p+q}(x \wedge y) = d_p(x) \wedge y + (-1)^p \, x \wedge d_q(y)$

preuve : Si $x = u_1 \wedge \dots \wedge u_p$ et $y = u_{p+1} \wedge \dots \wedge u_{p+q}$,

$$d_{p+q}(x \wedge y) = \sum_{k=1}^{p+q} (-1)^{k+1} \varphi(u_k) \, u_1 \wedge \dots \wedge \hat{u}_k \wedge \dots \wedge u_{p+q}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{p} \dots\right) \wedge y + x \wedge \left(\sum_{k=p+1}^{p+q} (-1)^{k+1} \varphi(u_k) \, u_{p+1} \wedge \dots \wedge \hat{u}_k \wedge \dots \wedge u_{p+q} \right)$$

($\hat{u}_k$: $(k-p)$-ième place)

$$= d_p(x) \wedge y + (-1)^p \, x \wedge d_q(y)$$

□

Définitions

1) Le complexe $K(\varphi)$ défini ci-dessus s'appelle "complexe de KOSZUL associé à $\varphi \in \mathrm{Hom}(M, R)$"

2) Si M est un R-module libre de rang n et de base $(e_1, \dots, e_n)$, et si $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, on note $K(x)$ le complexe $K(\varphi)$ où

$$\varphi : M \longrightarrow R$$
$$\sum \lambda_i e_i \longmapsto \sum \lambda_i x_i$$

$K(x)$ s'appelle "le complexe de KOSZUL associé à la suite x"

3) Si N est un R-module

$K(\varphi ; N)$ est le complexe $K(\varphi) \otimes_R N$ de différentielle $d_p \otimes 1$

$K(x ; N)$ " $K(x) \otimes_R N$ "

Th 1 : $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$
N = R-module

$$H_0(K(x;N)) = N / (x_1, \dots, x_n)N$$

NB : Dans cette écriture et en notant I l'idéal de R engendré par $x_1, \dots, x_n$; ie $I = (x_1, \dots, x_n)$, on note IN le sous-module de N engendré par les in où $i \in I$ et $n \in N$, ie $IN = \{ \sum_k i_k n_k \,/\, i_k \in I,\ n_k \in N$ et somme finie $\}$.

$$K : K_n \to \dots \to K_p \xrightarrow{d_p} K_{p-1} \to \dots \to K_1 \xrightarrow{d_1} K_0 \to 0$$

$K_p = \Lambda^p M \otimes N$, $K_1 = M \otimes N$, $K_0 = R \otimes N$

$$\boxed{H_0(K) = K_0 / \operatorname{Im} d_1 = R \otimes N / \operatorname{Im} d_1}$$

- $d_p(u_1 \wedge \dots \wedge u_p) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \varphi(u_k) u_1 \wedge \dots \wedge \hat{u}_k \wedge \dots \wedge u_p$ pour $K(\varphi)$, donc

$$d_1(u \otimes n) = d_1(u) \otimes n = \varphi(u) \otimes n$$

Ici $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, $\lambda_i \in R$, $e_i \in M$ et $\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, donc

$$\boxed{d_1(u \otimes n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes n}$$

- Posons $\Psi : R \otimes N \longrightarrow N / (x_1, \dots, x_n)N$
$\quad r \otimes n \longmapsto \dot{\overline{rn}}$

(Ψ bien définie grâce à la propriété universelle de $\otimes$, et elle est surjective.)

On a :

$$\Psi(r \otimes n) = 0 \iff rn = \sum_{i=1}^{n} x_i n_i \; ; (n_i \in N) \underset{(*)}{\iff} r \otimes n = 1 \otimes rn = 1 \otimes \sum_{i=1}^{n} x_i n_i$$

$$\iff r \otimes n = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes n_i$$

Ce qui prouve que $\boxed{\operatorname{Ker} \Psi = \operatorname{Im} d_1}$ et l'isomorphisme. □

(*) on utilise l'isomorphisme $R \otimes N \xrightarrow{\sim} N$, $r \otimes n \longmapsto rn$, $1 \otimes n \longleftarrow n$ bien connu... qui permet d'affirmer que $R \otimes N \simeq N$ (voir aussi $R^n \otimes N \simeq N^n$ dans [U] Produit tensoriel)

Th 2 : $H_p(K(x;N))$ est annulé par l'idéal $(x_1, \dots, x_n) + \mathrm{Ann}\, N$

preuve :

$$H_p(K) = \frac{\mathrm{Ker}\, d_p}{\mathrm{Im}\, d_{p+1}} = \frac{Z_p}{B_p}$$

Si z est un p-cycle, il faut montrer que $x_i z \in B_p$. Cela provient du calcul :

$$d_{p+1}(e_i \wedge z) = d_1(e_i) \wedge z - e_i \wedge \underbrace{d_p(z)}_{=0} \qquad \text{(abus) (cf Pro)}$$

$$= x_i z$$

Ainsi tout élément de $H_p(K)$ est annulé par l'idéal $(x_1, \dots, x_n)$.
Comme $\mathrm{Ann}\, N$ annule $H_p(K)$ de façon triviale, la prop. s'en déduit. □

Qques définitions pour préparer le Th 3 :

① Une suite $x = (x_1, \ldots, x_n)$ d'un anneau R est dite régulière si x_1 n'est pas diviseur de 0 dans R et si

$$\forall k \in \{2, \ldots, n\} \qquad \dot{x}_k \in R/_{(x_1, \ldots, x_{k-1})} \quad \text{n'est pas diviseur de zéro.}$$

② La profondeur d'un idéal (depth) est la longueur maximale d'une suite régulière de cet idéal.

③ Un complexe de R-modules est la donnée des R-modules F_p et de différentielles $d_p : F_p \to F_{p-1}$ (ce sont des morph. de R-modules) vérifiant $d_{p-1} \circ d_{p} = 0$, et l'on note

$$\cdots \longrightarrow F_p \xrightarrow{d_p} F_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

④ Une résolution libre du R-module M est la donnée d'une suite exacte de R-modules du style

$$\cdots \longrightarrow F_p \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où tous les modules F_p sont libres.

⑤ NB : Étant donné un complexe F de R-modules libres (1), $H_0 = Z_0/B_0 = F_0/\operatorname{Im} d_1$ est le 0-ième module d'homologie, et l'on a :

$$\cdots \longrightarrow F_p \xrightarrow{d_p} F_{p-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \longrightarrow F_0/\operatorname{Im} d_1 = H_0 \longrightarrow 0$$

2 maillons exacts (en F_0 et H_0)

Vérifier que ce complexe est une résolution libre de $F_0/\operatorname{Im} d_1$ revient alors à prouver que $H_p(F) = 0$ pour tout $p \geq 1$ (ie que la suite est exacte en chaque F_p où $p \geq 1$). C'est ce qu'on va utiliser dans la démonstration du Th 3...

Th 3 : Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est une suite <u>régulière</u> de R, le complexe de KOSZUL $K(x)$ est une <u>résolution libre</u> du R-module $R/(x_1, \dots, x_n)$

preuve : Récurrence sur n

- <u>Si $n=1$</u>, $M = Re_1$ et $K(x)$ est le complexe

$$0 \longrightarrow Re_1 \xrightarrow{d_1} R \longrightarrow 0$$
$$re_1 \longmapsto rx_1$$

et l'on déduit que la suite

$$0 \longrightarrow Re_1 \xrightarrow{d_1} R \longrightarrow R/(x_1) \longrightarrow 0$$

est la résolution libre cherchée : en effet, $\ker d_1 = \{0\}$ car x_1 n'est pas diviseur de 0 dans R.

- <u>Au rang n</u>, notons $\begin{cases} (e_1, \dots, e_n) \text{ la base de } M \\ M = E \oplus Re_n \text{ où } E = Re_1 \oplus \dots \oplus Re_{n-1} \end{cases}$

$$X \doteq K(x_1, \dots, x_{n-1}) \underset{\text{sous-complexe}}{\subset} K = K(x_1, \dots, x_n) = K(x)$$

puisque $\Lambda^p M = \Lambda^p E \oplus (\Lambda^{p-1} E \otimes Re_n)$ et d'après la déf. de la dérivation d_p.

En effet $M = E \oplus Re_n$ donc $u_1 \wedge \dots \wedge u_p \in \Lambda^p M$ s'écrit
$u_i = v_i + r_i e_n$

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_p = (v_1 + r_1 e_n) \wedge \dots \wedge (v_p + r_p e_n) = v_1 \wedge \dots \wedge v_p + \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_{p-1} \le p} (\text{coeff. dans } R)\, v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{p-1}} \wedge e_n$$

$$v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{p-1}} \wedge e_n = (v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{p-1}}) \otimes e_n$$

identification avec ce produit tensoriel car les v_i qui interviennent sont seulement comb. linéaires des $e_1, \dots, e_{n-1}$ et ne peuvent donner lieu à des égalité avec le dernier terme e_n.

<u>Idée plus précise</u> : $\Lambda^{p-1} E \otimes Re_n \to \Lambda^{p-1} E \wedge (Re_n)$
$(v_1 \wedge \dots \wedge v_{p-1}) \otimes e_n \longmapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_{p-1} \wedge e_n$
est R-linéaire (cf Th. univ. de $\otimes$), surjective. L'injectivité provient de "$(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{p-1}})_{1 \le i_1 < \dots < i_{p-1} \le p-1}$ est une base de $\Lambda^{p-1} E$"
en effet, si $v_1 \wedge \dots \wedge v_{p-1} \wedge e_n = 0$, on écrit $v_1 \wedge \dots \wedge v_{p-1}$ en fct des $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{p-1}}$, et comme e_n n'intervient pas dans ces e_{i_k}, on déduit puisque $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le p}$ est une base de $\Lambda^p M$, que $v_1 \wedge \dots \wedge v_{p-1} = 0$ donc $(v_1 \wedge \dots \wedge v_{p-1}) \otimes e_n = 0$ □

Y = complexe quotient K/X

On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow K \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

avec $\boxed{Y_p = K_p/X_p \simeq X_{p-1}}$

car $u_1 \wedge \dots \wedge u_p \in K_p = \Lambda^p M$ $\qquad u_i \in M = Re_1 \oplus \dots \oplus Re_n$

$v_1 \wedge \dots \wedge v_p \in X_p = \Lambda^p E$ $\qquad v_i \in E = Re_1 \oplus \dots \oplus Re_{n-1}$

$M = E \oplus Re_n$

$u_i = v_i + r_i e_n$

Dans K_p/X_p, $\overline{u_1 \wedge \dots \wedge u_p}^{\,\cdot} = \overline{(v_1 + r_1 e_n) \wedge \dots \wedge (v_p + r_p e_n)}^{\,\cdot}$

$$= \overline{\sum (\text{coeff. ds } R)\, v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{p-1}} \wedge e_n}^{\,\cdot}$$

et $X_{p-1} \longrightarrow Y_p = K_p/X_p$ est un isomorphisme (facile)

$v_1 \wedge \dots \wedge v_{p-1} \longmapsto \overline{v_1 \wedge \dots \wedge v_{p-1} \wedge e_n}^{\,\cdot}$

(pour l'injectivité, ne pas oublier que $M = \bigoplus_{i=1}^{n} Re_i$ est un R-mod. libre, donc que $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})_{i_1 < \dots < i_p}$ est une base de $\Lambda^p M = K_p$. En exprimant les v_i dans la base $(e_1, \dots, e_{n-1})$, on trouve $\overline{v_1 \wedge \dots \wedge v_{p-1} \wedge e_n} = \dot{0} \Rightarrow v_1 \wedge \dots \wedge v_{p-1} = 0$)

On déduit $H_p(Y) \simeq H_{p-1}(X)$ et l'hypothèse récurrente entraîne $H_p(X) = 0$ pour $p \geq 1$, donc $\boxed{H_p(Y) = 0 \text{ pour } p \geq 2}$

La suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow K \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

induit la suite exacte d'homologie

$$\dots \longrightarrow \underset{\underset{0}{\|}}{H_p(X)} \longrightarrow H_p(K) \longrightarrow \underset{\underset{0}{\|}}{H_p(Y)} \xrightarrow[\text{morphisme de connexion}]{\delta} H_{p-1}(X) \longrightarrow \dots$$

donc $\boxed{H_p(K) = 0 \quad \forall p \geq 2}$

On a la suite exacte

$$\cdots \longrightarrow \underset{}{\overset{H_1(X)}{\overset{\|}{0}}} \longrightarrow H_1(K) \longrightarrow H_1(Y) \xrightarrow{\delta} H_0(X)$$

donc $H_1(K) = \operatorname{Ker} \delta$

LEMME

Un calcul direct mq la composition de l'isomorphisme $H_0(X) \simeq H_1(Y)$ et du morphisme de connexion δ est la multiplication par x_n : $H_0(X) \longrightarrow H_0(X)$, soit

$$H_0(X) \underset{g}{\overset{\sim}{\longrightarrow}} H_1(Y) \overset{\delta}{\longrightarrow} H_0(X) \qquad (\text{composée} : x_n)$$

ce qui entraine

$$H_1(K) = \operatorname{Ker} \delta = g(\operatorname{Ker} x_n) = g(\{0\}) = \{0\}$$

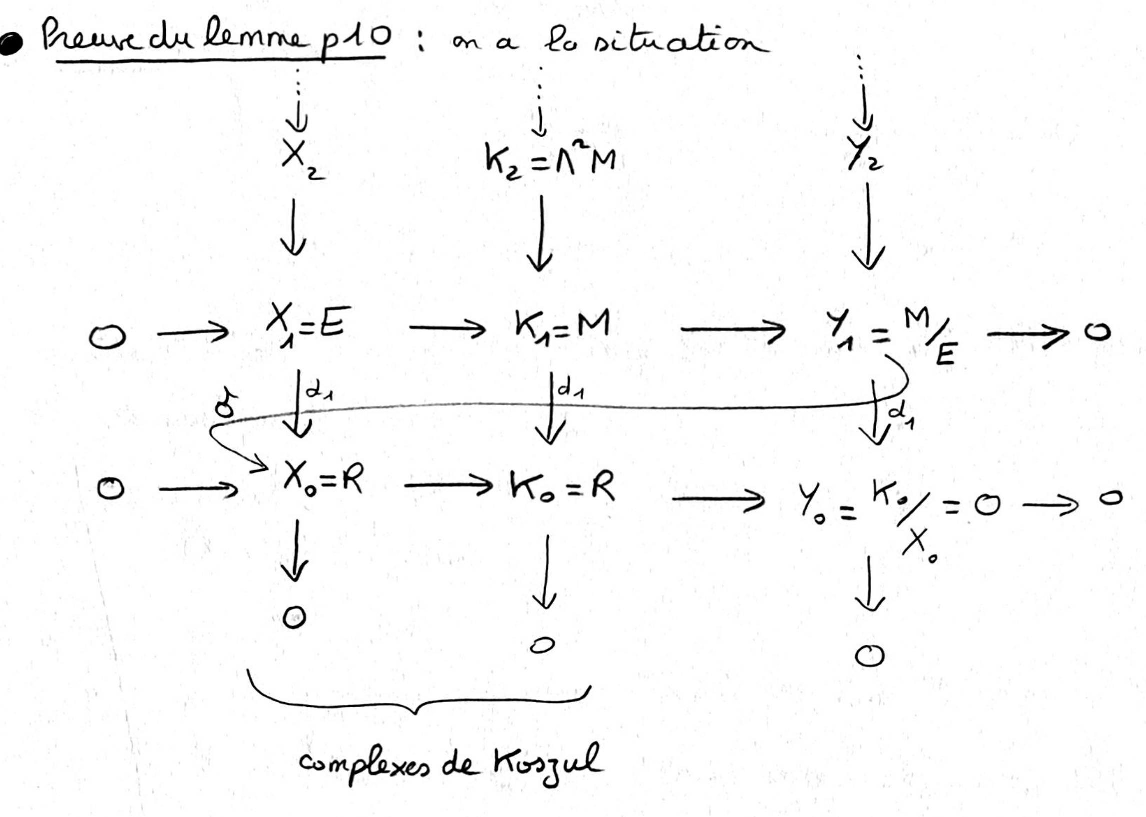
puisque $\operatorname{Ker} x_n = \{0\}$ par hypothèse.

En effet, $x_n : H_0(X) = R/(x_1, \dots, x_{n-1}) \xrightarrow{\times x_n} H_0(X) = R/(x_1, \dots, x_{n-1})$

et x_n n'est pas diviseur de zéro dans $R/(x_1, \dots, x_{n-1})$, la suite étant supposée régulière.

□

- <u>Preuve du lemme p10</u> : on a la situation



La preuve du lemme est articulée en 2 temps : expliciter δ, puis exhiber un isomorphisme g.

ⓐ <u>Expliciter δ</u> :

Si $m \in M$, $\dot{m} \in M/E$ et en supposant que $\dot{m}$ est un cycle, on sait que $\delta(\dot{m})$ = classe d'un antécédent de $d_1(m) \in K_0 = R$ par $X_0 = R \xrightarrow{\sim} K_0 = R$ $= \dot{\overline{d_1(m)}}$

Comme $m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \Rightarrow d_1(m) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ et comme $\delta(\dot{m})$ ne dépend pas des représentants choisis pour le définir (cf. généralités sur le morphisme de connexion), on peut choisir un représentant $m \in M$ de $\dot{m}$ de la forme :

$$m = \lambda e_n \qquad \lambda \in R$$

de sorte que

$$\delta(\dot{m}) = \dot{\overline{d_1(m)}} = \lambda \dot{x}_n$$

(b) <u>Exhiber g</u> : on a envie de poser

$$H_0(X) = R/_{(x_1,\dots,x_{n-1})} \underset{g}{\overset{\sim}{\longrightarrow}} H_1(Y) \overset{\delta}{\longrightarrow} H_0(X)$$
$$\dot{r} \longmapsto \dot{\widehat{re_n}} \longmapsto r\dot{x}_n = \dot{r}\dot{x}_n$$

puisque l'on voit bien qu'alors $\delta \circ g$ est la multiplication par x_n.
Il reste seulement à vérifier que

① g est bien définie
② g est bijective.

① <u>g est bien définie</u> :

* $\widehat{re_n}$ est bien un cycle dans $Z_1(Y)$ car $Y_0 = K_0/K_0 = 0$ (donc $Z_1(Y) = Y_1$)
* Si $r - r' \in (x_1, \dots, x_{n-1})$, il faut mq $re_n - r'e_n \in B_1(Y)$.

On a :

$$\begin{cases} re_n - r'e_n = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i\right) e_n \\ d_2(\underbrace{u_1 \wedge u_2}_{\in K_2}) = \underbrace{d_1(u_1)}_{\in R} \wedge u_2 - u_1 \wedge \underbrace{d_1(u_2)}_{\in R} = d_1(u_1)u_2 - d_1(u_2)u_1 \\ d_1(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i}_{\in K_1}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \end{cases}$$

Donc
$$d_2\Big(\underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i\Big) \wedge e_n}_{\in K_2}\Big) = \underbrace{\overbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i\Big) e_n}^{re_n - r'e_n} - x_n \Big(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i\Big)}_{\in K_1}$$

Par passage au quotient (dans $K_1/X_1 = Y_1 = M/E$), les termes comb. lin. des $e_1, \dots, e_{n-1}$ disparaissent et :

$$d_2\Big(\qquad \Big) = re_n - r'e_n$$

est un bord. □

② <u>g est bijective</u> : elle est <u>clairement surjective</u> vu le passage au quotient modulo $E = Re_1 \oplus \dots \oplus Re_{n-1}$). On a vu que

$$\delta \circ g = \text{multiplication par } x_n$$

Par hypothèse, la multiplication par x_n de $H_0(X) = R/_{(x_1, \dots, x_{n-1})}$ dans $H_0(X)$ est injective, donc

$$\delta \circ g \text{ injective}$$

donc g <u>injective</u>.

Le lemme est démontré. □